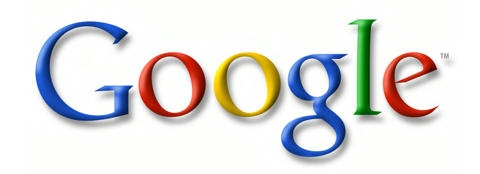




Theorie der Brechung monochromatischer Strahlen verschiedener Wellenlänge in Zylinder-Linsen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät der Landes-Universität Rostock

vorgelegt von

Otto Götz,

Diplom-Ingenieur aus Hannover.

ROSTOCK.

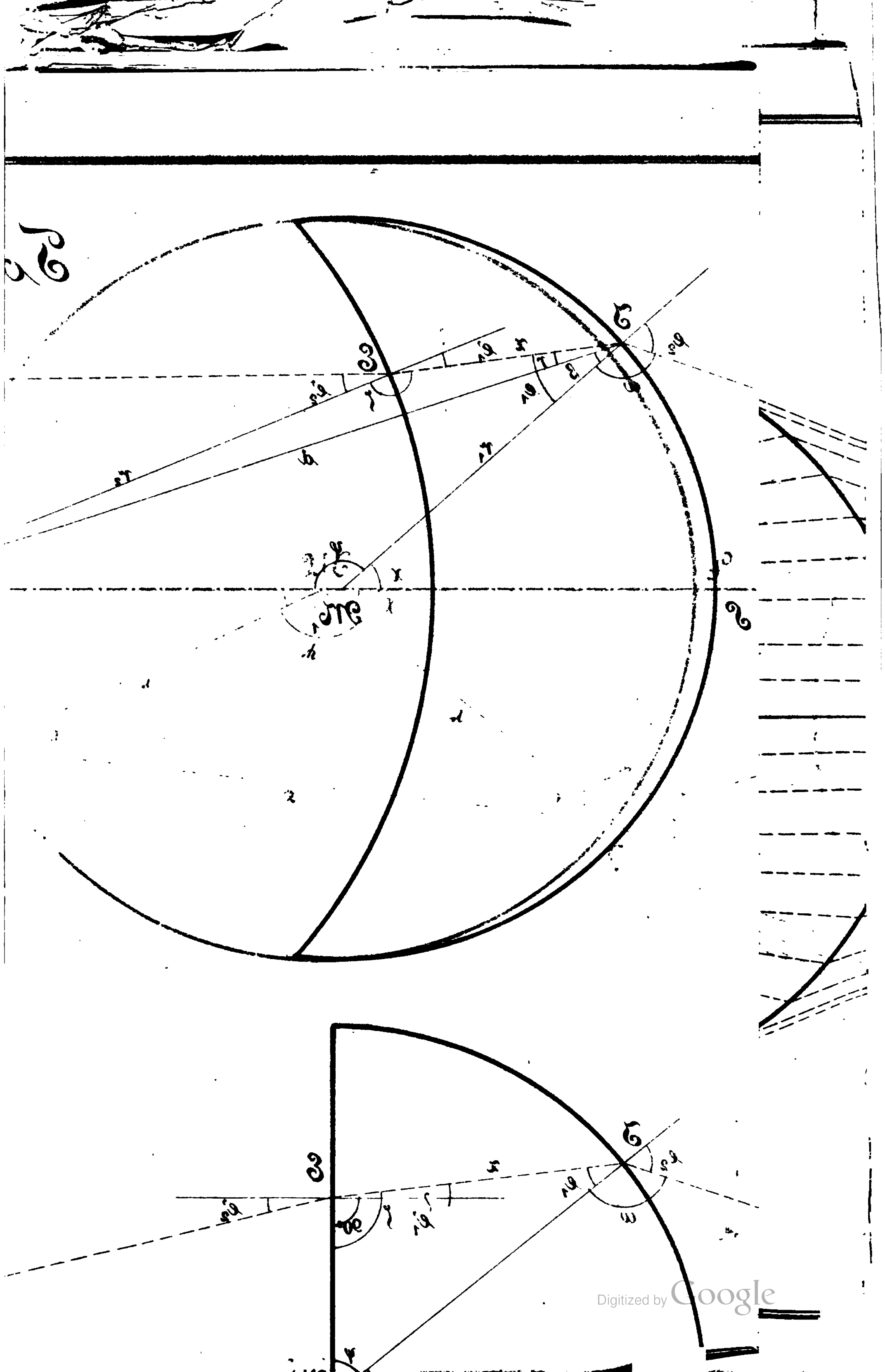
Ww. H. Winterberg's Buchdruckerei

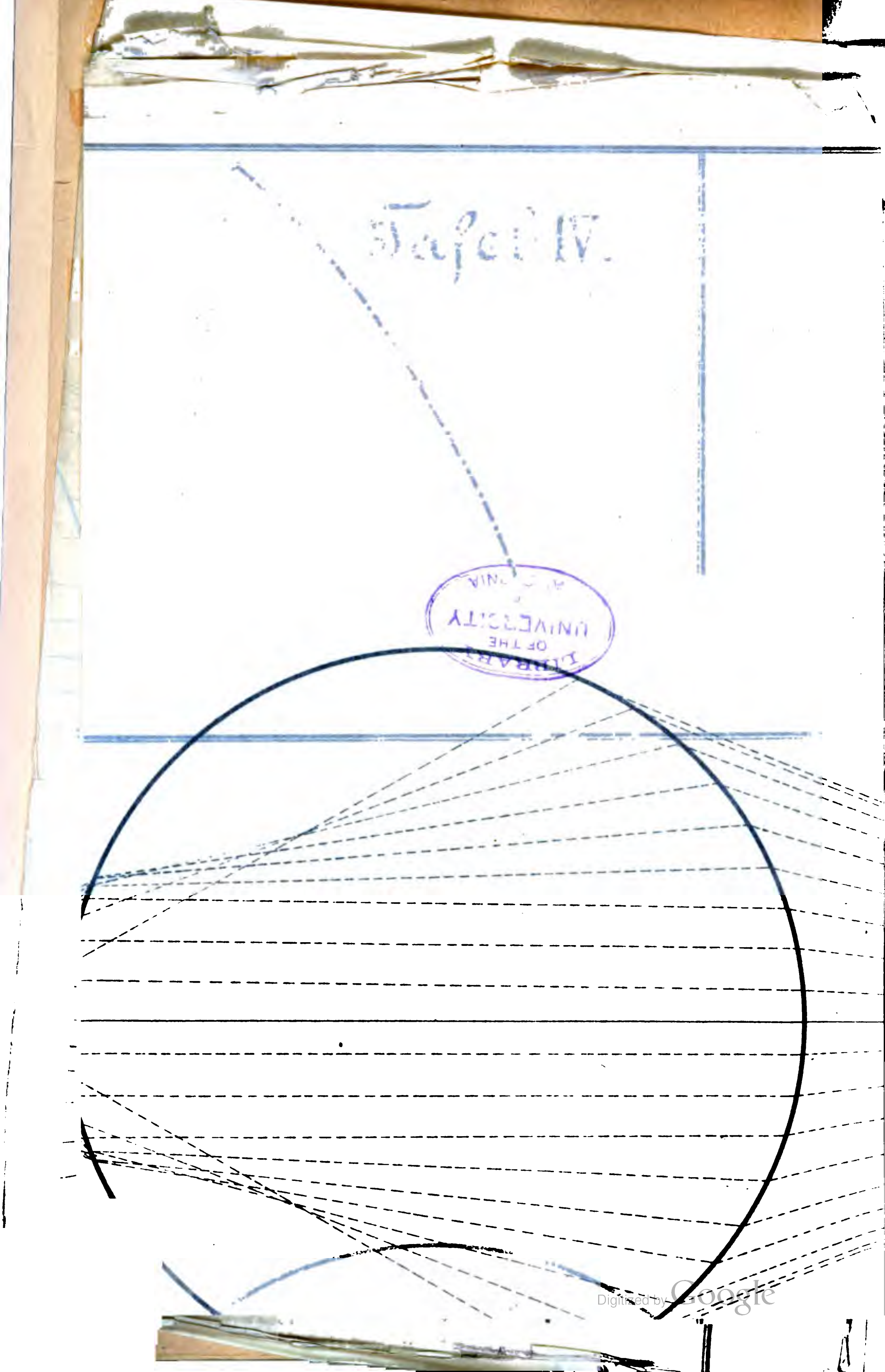
1905.

Referent: Herr Professor Dr. Wachsmuth.

Meinen Eltern

in Liebe und Dankbarkeit gewidmet.





Tafel IV.

Inhaltsverzeichnis.



Einleitung.

Schon im Jahre 1713 hatte der Mechaniker Jacob Leupold laut einer von ihm verfassten Schrift[1] Apparate konstruiert, mit denen er Anamorphosen — d. h. Zerrbilder — herstellte, welche, in einem entsprechenden, kegelförmigen oder zylindrischen Spiegel betrachtet, richtige wohlproportionierte Bilder ergaben. Leupold gibt nicht an, ob er seine Apparate und Bilder mathematischen oder graphischen Untersuchungen verdankt.

Man kann daher annehmen, dass ihm die Gesetze über Brechung und Spiegelung in gekrümmten Flächen unbekannt waren.

Gauss beschränkte sich im Jahre 1841 in seinen „dioptrischen Untersuchungen" auf die Fälle, wo bei der Brechung in einer sphärischen Fläche die Strahlen paraxial verlaufen.

Der Mathematiker Jaques Sturm[2] dehnte im Jahre 1845 in seiner Abhandlung „Mémorie sur l'optique" zuerst seine Untersuchungen auch auf solche Strahlenbündel aus, die in messbarer Entfernung von der optischen Axe verlaufen. Er beobachtete, dass ein unendlich dünnes Strahlenbündel bei schiefer Incidenz auf eine Kugeloberfläche im allgemeinen nicht ein punktuelles Bild, sondern ein verzerrtes ergab. Auch wies er schon nach, dass

---

[1]) Anamorphosa mechanica nova.

[2]) Sturm. — Memoire sur l'optique. Compt. rend. XX (1845) Pogg. Ann. 65 p. 116 und 374 (1845).

die Strahlen nach der Brechung durch zwei sich kreuzende unendlich kleine Linien gehen. Der von den gebrochenen Strahlen gebildete Raum hat statt der kegelförmigen Gestalt vor der Brechung eine tetraëdische oder prismatoïdische angenommen. Die beiden sich kreuzenden kleinen Linien werden Brennlinien genannt und haben Maxima an Helligkeit.

Für ihre Entfernung und Lage stellte er zugleich Gleichungen auf, indem er die Objekt- und Bilddistanzen auf rechtwinklige Coordinaten bezog. Jaques Sturm ist also der erste gewesen, der die Theorie des Astigmatismus mathematisch untersucht hat.

Eine wesentliche Förderung erhielten dann diese Untersuchungen im Jahre 1867 durch Reusch.[1] Dieser mass die Abscissen konjugierter Punkte auf den Lichtstrahlen selbst und setzte als Coordinatenanfangspunkt den Incidenzpunkt fest.

Am meisten wurde die Wissenschaft des Astigmatismus durch die Arbeiten von R. S. Heath,[2] C. Neumann[3] und L. Matthiessen[4] gefördert. Deren eingehenden Untersuchungen über die Brechung unendlich dünner Strahlenbüschel in beliebig gekrümmten Oberflächen, sowie über die Lage der Brennlinien zu einander sind in den unten angegebenen Schriften zu finden.

---

[1]) Reusch, Reflektion und Brechung des Lichtes in sphärischen Flächen. Pogg. Ann. 1867 p. 497.

[2]) R. S. Heath, A treatise on geometrical Optics. Cambridge 1887.

[3]) C. Neumann. Brechung sehr dünner Strahlenbündel. Ber. d. sächs. Gesell. d. Wissensch. Physik-Math.-Klasse, 1880, p. 53.

[4]) L. Matthiessen, Ueber die Form der unendlich dünnen astigmatischen Strahlenbündel und die Kummerschen Modelle. Münch. Ber. 1883. — Ueber den Astigmatismus von Strahlenbündel bei schiefer Incidenz auf krummen Oberflächen. Berlin, Ewers-Busch' — Ztsch. f. vgl. Augenhlk. II. § 39 (1889).

Kummer war es, der als Erster zur besseren Demonstration dieser Erscheinung Fadenmodelle konstruierte.

Sturm und Kummer behaupten, dass die beiden Brennlinien auf dem Hauptstrahl des Bündels senkrecht stehen, während Neumann und Matthiessen die Ansicht vertreten, dass die beiden Brennlinien im allgemeinen schiefe Winkel mit dem Hauptstrahl bilden.

In vorliegender Arbeit haben wir uns der Meinung von Sturm und Kummer angeschlossen.

[1]) Kummer, Allgemeine Theorie der gradlinigen Strahlensysteme. Crelles Journal LVII, p. 189 und Monatsberichte der Berliner Akademie. 1860, p. 469.

Erklärung einiger Bezeichnungen.

Zum Teil haben wir uns in der Einleitung schon, zum Teil werden wir uns im Laufe der Arbeit noch einiger Ausdrücke bedienen, mit denen wir ganz bestimmte Eigenschaften und Erscheinungen bezeichnen wollen. In diesem Abschnitt sollen nun diese Ausdrücke erläutert werden.

Mit Astigmatismus στίγμα = der Punkt und α privativum) bezeichnet man die Eigenschaft, dass homozentrische Strahlen, die auf eine brechende krumme Oberfläche schief auffallen, — d. h. in messbarer Entfernung von der optischen Axe — man spricht dann von schiefer Incidenz —, nach der Brechung nicht wieder alle in einem Punkte vereinigt werden und ein scharfes punktuelles Bild ergeben,[1] sondern durch zwei unendlich kleine, von einander entfernte Brennlinien gehen und also ein verzerrtes, verschwommenes Bild ergeben.

Homocentrisch nennen wir (ὁμός = gleich und centrum) solche Strahlen, die von ein und demselben Punkte herkommen, im Gegensatze zu paraxialen (παρὰ = neben und Axe) Strahlen, die unendlich nahe an der optischen Axe liegen und deren Einfalls- und Brechungswinkel verschwindend klein sind.

[1]) Wir haben es in solchem Falle mit „Stigmatismus“ oder „Aplanatismus“ zu tun.

Der Punkt, in dem der Hauptstrahl — d. i. der mittlere Strahl eines Strahlenbündels — die krumme Oberfläche trifft, heisst der Incidenzpunkt.

Unter Objekdistanz versteht man die Entfernung des leuchtenden Punktes vom Incidenzpunkt, unter Bilddistanz die Entfernung des Bildpunktes vom Incidenzpunkte, beide gemessen auf den Strahlen selbst.

Der Hauptnormalschnitt ist der Schnitt durch das Einfallslot, der den grössten Krümmungsradius der krummen Oberfläche enthält.

Der Nebennormalschnitt steht auf dem Hauptnormalschnitt senkrecht und läuft ebenfalls durch das Einfallslot.

Unter dem Azimut der Einfallsebene — d. h. der Ebene, die den Einfallsstrahl und das Einfallslot enthält, —, versteht man den Winkel, den der Hauptnormalschnitt mit der Einfallsebene einschliesst.

Die Vorzeichen der Abscissen werden bestimmt, indem man die Strecken nach links gerechnet vom Nullpunkt negativ, diejenigen nach rechts positiv annimmt.

Der Krümmungsradius wird positiv genommen, wenn der einfallende Strahl auf eine konvexe Fläche fällt, negativ wenn er auf eine konkave Fläche fällt.

Definition des Problems.

In der vorliegenden Arbeit soll nun die Brechung monochromatischer Strahlen verschiedener Wellenlänge in Zylinder-Linsen untersucht werden. Man kann leicht nachweisen,[1] dass die astigmatische Brechung nicht nur bei schiefem Durchgang enger Strahlenbüschel durch Kugelflächen eintritt, sondern auch bei senkrechtem Durchgang durch kontinuierlich gekrümmte Flächen, wenn nämlich die durch die Axe des Bündels gelegten Ebenen Kurven verschiedener Krümmung ausschneiden. Als Hauptrepräsentant derartiger in der Optik verwendeten Flächen ist die Zylinderfläche zu nennen. Es wurde angenommen, dass der Diopter aus Flintglas Nr. 13 besteht. Aus der verschiedenen Brechbarkeit der Strahlen des Spektrums folgt, dass das Brechungsverhältnis derselben Substanz für verschiedene Strahlen ungleiche Werte besitzt, dass daher bei genaueren Angaben des Brechungsverhältnisses immer hinzugefügt werden muss, für welche Wellenlänge dasselbe gilt. Die Fraunhofer'schen Linien bilden nun ein bequemes Hilfsmittel zur Bezeichnung bestimmter Strahlen des Spektrums.

Wir wollen daher, wie allgemein üblich, unsere Angaben auch auf diese Fraunhofer'schen Linien beziehen. Es sind fol-

---

[1]) Müller-Pouillet. Bd. II. § 185, p. 479.

gende Wellenlängen λ und Brechungsexponenten n der späteren Berechnung zu Grunde gelegt.

Linie	λ in μμ	n	Linie	λ in μμ	n
A	759,4	1,62433	E	527,0	1,64202
B	686,7	1,62774	F	486,1	1,64826
C	656,3	1,62968	G	430,7	1,66029
D	589,6	1,63503	H	396,8	1,67106

Berücksichtigt werden die konkavkonvexe, die plankonvexe und die bikonvexe Zylinder-Linse. Es ergeben sich für diese Linsen nach den gleich zu besprechenden Neumann'schen Formeln je 2 Bilddistanzen.

Die Aufgabe dieser Arbeit ist es, diese zwei verschiedenen Bilddistanzen für verschiedene Incidenzwinkel zu berechnen und die so entstehenden Bildkurven zu zeichnen, welche bei der Zylinderlinse dem einfachen Bildpunkte einer Kugelfläche entsprechen.

Mathematischer Teil.

Ableitung der Neumann'schen Formeln für Zylinderlinsen.

Fällt ein unendlich dünnes Strahlenbündel auf eine krumme Oberfläche, so geschieht sowohl die Brechung als auch die Spiegelung in der Einfallsebene. Legt man nun durch einen dem Incidenzpunkt unendlich nahen Punkt eine der Tangentialebene parallele Ebene, so schneidet diese von der gekrümmten Fläche eine Kuppe ab. Die Spitze derselben ist der Incidenzpunkt und die Basis ein unendlich kleiner (sogenannter Dupin'scher) Kegelschnitt.

Nun sind die Neumann'schen Strahlencoordinaten eine Art von doppelten Polarcoordinaten für die Bestimmung der korrespondierenden Örter von Objekt- und Bildpunkten. Der einfallende Strahl und der gebrochene bilden die radii vectores, die zugleich die Objekt- und Bilddistanz vom Incidenzpunkt darstellen. Der Einfallswinkel e_2 und der Brechungswinkel e_1 bilden die Polarwinkel. Ist nun die Incidenz eines sehr dünnen Strahlenbündels eine schiefe und besitzt die Fläche im Incidenzpunkt zwei verschiedene Krümmungsradien ρ_1 und ρ_2, so erhält der gebrochene Strahl — wie früher schon gesagt — zwei verschiedene Bildpunkte oder Brennlinien, und also auch zwei radii vectores

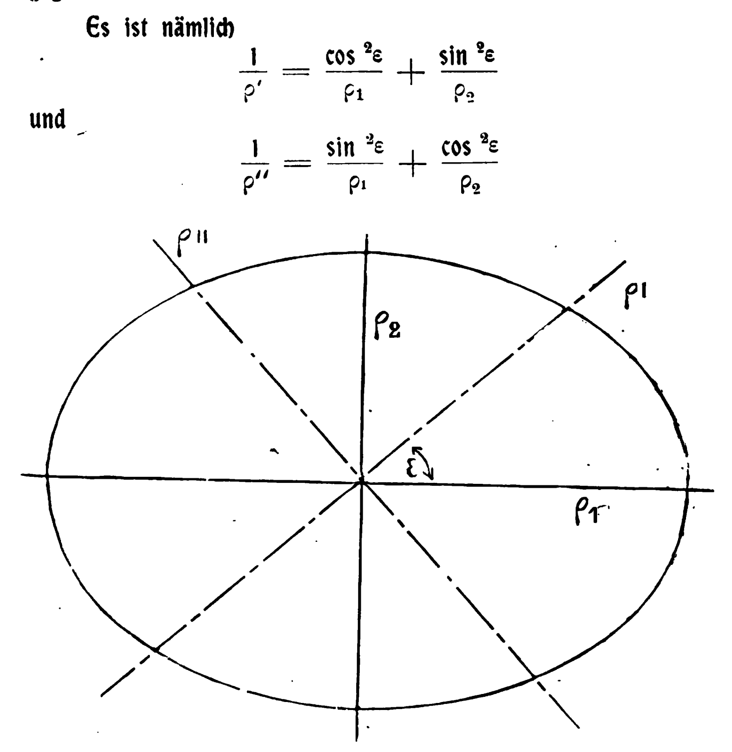
x_1 und x_2. Das sind die beiden Grössen, die in dieser Arbeit bestimmt werden sollen. Die Brechungsebene enthält den einfallenden Strahl x_0, den gebrochenen und das Einfallslot. Das sehr kleine krumme Flächenelement wird durch die Einfallsebene und die zu dieser senkrechten Ebene in zwei Bogen geschnitten, deren Krümmungsradien wir mit ρ' und ρ'' bezeichnet haben, die zu den Hauptkrümmungsradien ρ_1 und ρ_2 in einer bestimmten Beziehung stehen, die wiederum durch das Azimut ε der Schnitte gegeben ist.

Es ist nämlich

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{\cos^2\varepsilon}{\rho_1} + \frac{\sin^2\varepsilon}{\rho_2}$$

und

$$\frac{1}{\rho''} = \frac{\sin^2\varepsilon}{\rho_1} + \frac{\cos^2\varepsilon}{\rho_2}$$



In vorstehender Figur, die den Grundriss der abgeschnittenen Kuppe darstallt, haben wir bezeichnet mit

ρ_1 den Krümmungsradius der krummen Fläche im Hauptnormalschnitt.

ρ_2 den Krümmungsradius der krummen Fläche im Nebennormalschnitt.

ρ' den Krümmungsradius in der Einfallsebene mit dem Azimute ε.

ρ'' den Krümmungsradius in der dazu senkrechten Ebene.

Ist nun schon das einfallende Strahlenbündel astigmatisch — a priori astigmatisch — mit den Objektdistanzen x_0 und ξ_0 der beiden Brennlinien b_1 und b_2, dem Azimut ϑ_1 und der Fokalebene Σb_1, andrerseits das gebrochene Strahlenbündel astigmatisch mit den Bilddistanzen x_1 und x_2 der beiden Brennlinien α_1 und α_2, dem Azimut ϑ_2 und der Fokalebene $\Sigma\alpha_1$, ist endlich ρ_2 der Einfallswinkel, ρ_1 der Berechnungswinkel, so gelten für die Bestimmung von x_1, x_2 und ϑ_2 die folgenden Formeln von Carl Neumann:

$$\text{I a)} \quad \frac{\rho_1 \, \rho_2 \sin e_1}{\rho_2 \cos^2\varepsilon + \rho_1 \sin^2\varepsilon) \cdot \sin(e_2 - e_1} \Big\{ - \cos e_2{}^2 \cdot \left(\frac{\cos\vartheta_1{}^2}{x_0} + \frac{\sin\vartheta_1{}^2}{\xi_0}\right) + \frac{\sin e_2}{\sin e_1} \cdot \cos^2 e_1 \cdot \left(\frac{\cos\vartheta_2{}^2}{x_2} + \frac{\sin\vartheta_2{}^2}{x_1}\right) \Big\} = 1,$$

$$\text{II a)} \quad \frac{\rho_1 \, \rho_2 \sin e_1}{(\rho_2 \sin^2\varepsilon + \rho_1 \cos^2\varepsilon) \sin(e_2 - e_1)} \cdot \Big\{ - \left(\frac{\sin\vartheta_1{}^2}{x_0} + \frac{\cos\vartheta_1{}^2}{\xi_0}\right) + \frac{\sin e_2}{\sin e_1} \cdot \left(\frac{\sin\vartheta_2{}^2}{x_2} + \frac{\cos\vartheta_2{}^2}{x_1}\right) \Big\} = 1,$$

$$\text{III a)} \quad \frac{\rho_1 \, \rho_2 \sin e_1}{(\rho_1 - \rho_2) \sin(e_2 - e_1)} \Big\{ - \frac{\cos e_2 \sin^2\vartheta_1}{\sin^2\varepsilon} \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{\xi_0}\right) + \frac{\sin e_2 \cdot \cos e_1 \cdot \sin 2\vartheta_2}{\sin e_1 \cdot \sin^2\varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right) \Big\} = 1$$

Diese Formeln lassen sich in folgenden speziellen Fällen vereinfachen, und zwar wollen wir die Spezialisierung so weit

durchführen, dass wir die Formeln ohne weiteres für unsere Zylinderlinsen gebrauchen können.

1) Wenn das einfallende Strahlenbündel homozentrisch, also $x^0 = \xi^0$ ist, so wird:

Ib)
$$\frac{\rho_1 \rho_2 \cdot \sin e_1}{(\rho_2 \cos^2 \varepsilon + \rho_1 \sin^2 \varepsilon) \cdot \sin(e_2 - e_1)} \cdot$$
$$\cdot \left\{ -\frac{\cos e_2^{\,2}}{x_0} + \frac{\sin e_2}{\sin e_1} \cdot \cos e_1^{\,2} \left(\frac{\cos \vartheta^2_2}{x_2} + \frac{\sin \vartheta^2_2}{x_1} \right\} = 1,$$

IIb)
$$\frac{\rho_1 \ \rho_2 \ . \sin e_1}{\rho_2 \cdot \sin^2 \varepsilon + \rho_1 \cos^2 \varepsilon) \cdot \sin (e_2 - e_1)} \cdot$$
$$\left\{ -\frac{1}{x^0} + \frac{\sin e_2}{\sin e_1} \left(\frac{\sin \vartheta_2^{\,2}}{x_2} + \frac{\cos \vartheta_2^{\,2}}{x_1} \right) \right\} = 1,$$

III b)
$$\frac{\rho_1 \rho_2 \, . \sin e_1}{(\rho_1 - \rho_2) \cdot \sin (e_2 - e_1)} \cdot \frac{\sin e_2}{\sin e_1} \cdot$$
$$\frac{\cos e_1 \, . \sin 2 \, \vartheta_2}{\sin 2 \, \varepsilon} \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) = 1.$$

2) Wenn $\vartheta_2 = 90°$ wird, d. h. die erste Brennlinie b_1 steht senkrecht zur Einfallsebene, so erhalten wir statt der bisherigen drei Gleichungen nur zwei:

Ic)
$$\frac{\rho_1 \rho_2 \sin e_1}{(\rho_2 \cdot \cos^2 \varepsilon + \rho_1 \sin^2 \varepsilon) \, . \sin (e_2 - e_1)} \cdot$$
$$\left\{ -\frac{\cos e_2^{\,2}}{x_0} + \frac{\sin e_2}{\sin e_1} \cdot \frac{\cos e_1^{\,2}}{x_1} \right\} = 1,$$

IIc)
$$\frac{\rho_1 \rho_2 \sin e_1}{(\rho_2 \cdot \sin \varepsilon^2 + \rho_1 \cdot \cos^2 \varepsilon) \cdot \sin (e_2 - e_1)} \cdot$$
$$\left\{ -\frac{1}{x_0} + \frac{\sin e_2}{\sin e_1 \cdot x_2} \right\} = 1.$$

3) Fällt die Einfallsebene mit dem Hauptnormalschnitt zusammen, so ist das Azimut $\varepsilon = 0$. In unserem Falle fällt die Einfallsebene mit dem Nebennormalschnitt zusammen, es wird also $\varepsilon = 90^\circ$. Dann erhalten wir folgende Gleichungen:

$$\text{I d)} \quad \frac{\rho_2 \cdot \sin e_1}{\sin (e_2 - e_1)} \cdot \left\{ = \frac{\cos e_2{}^2}{x_0} + \frac{\sin e_2}{\sin e_1} \cdot \frac{\cos e_1{}^2}{x_1} \right\} = 1,$$

$$\text{II d)} \quad \frac{\rho_1 \cdot \sin e_1}{\sin (e_2 - e_1)} \cdot \left\{ - \frac{1}{x_0} + \frac{\sin e_2}{\sin e_1 \cdot x_2} \right\} = 1.$$

4) Da nun nach dem Brechungsgesetz von Snellius

$$\frac{\sin e_2}{\sin e_1} = n$$

ist, so wird:

$$\text{I e)} \quad \frac{\rho_2 \cdot \sin e_1}{\sin (e_2 - e_1)} \cdot \left\{ - \frac{\cos^2 e_2}{x_0} + \frac{n \cdot \cos^2 e_1}{x_1} \right\} = 1,$$

$$\text{II e)} \quad \frac{\rho_1 \cdot \sin e_1}{\sin (e_2 - e_1)} \cdot \left\{ - \frac{1}{x_0} + \frac{n}{x_2} \right\} = 1.$$

5) Bei unseren Zylinderlinsen ist ρ_1 der Krümmungsradius der Erzeugenden, und da diese eine gerade Linie ist, so ist $\rho_1 = \infty$. Da wir ferner einen Kreiszylinder voraussetzen, so wird $\rho_2 = r$, wo r der Radius des Grundkreises ist. Es gehen dann die Formeln über in:

$$\text{I f)} \quad \frac{r \cdot \sin e_1}{\sin (e_2 - e_1)} \cdot \left\{ - \frac{\cos^2 e_2}{x_0} + \frac{n \cdot \cos^2 e_1}{x_1} \right\} = 1,$$

$$\text{II f)} \quad - \frac{1}{x_0} + \frac{n}{x_2} = 0$$

Lösen wir diese beiden Gleichungen nach ihren Unbekannten x_1 und x_2 auf, so erhalten wir:

I g) $$x_1 = \frac{r \cdot n \cdot x_0 \cdot \sin e_1 \cdot \cos^2 e_1}{x_0 \cdot \sin(e_2 - e_1) + r \cdot \sin e_1 \cos^2 e_2},$$

II g) $$x_2 = n \cdot x_0 .$$

Diese Formeln kommen also für die nummerische Berechnung der Bilddistanzen in Betracht.

Wir wollen noch bemerken, dass wir aus allen vorstehenden Formeln, die für die Brechung gelten, leicht die entsprechenden Formeln für die Spiegelung in krummen Flächen erhalten können. Wir brauchen nur, da bei Spiegelung $e_2 = -e_1$ ist, für $n = -1$ zu setzen.

Trigonometrische Umrechnung.

Bei allen drei Linsen soll der Abstand des leuchtenden Punktes vom Scheitel der Linse 100 mm betragen, der Radius des nach dem leuchtenden Punkte zu konvexen Kreisbogens = 60 mm. Dann wird der Abstand des leuchtenden Punktes vom Krümmungsmittelpunkt = 160 mm. Konstruieren wir nun für die jeweiligen Einfallswinkel von 10° bis 90° die Einfallspunkte und verbinden diese mit dem leuchtenden Punkt einerseits und dem Krümmungsmittelpunkt andererseits, so entstehen Dreiecke, deren verschiedene Grössen die folgende Tabelle enthält. In diesen Dreiecken ist die Seite vom leuchtenden Punkte L bis zum Incidenzpunkt J die Objektdistanz, die wir in den Neumann'schen Formeln mit x_0 bezeichnet haben.

Diese nimmt dann folgende Werte an:

Tabelle 1.

∢ e_2	∢ ω	∢ φ	∢ χ	χ_0
10°	170°	3° 44′ 0″	6° 16′ 0″	100,57
20°	160°	7° 22′ 8″	12° 37′ 52″	102,29
30°	150°	10° 48′ 23″	19° 11′ 37″	105,21
40°	180°	13° 56′ 54″	26° 3′ 6″	109,32
50°	130°	16° 41′ 39″	33° 18′ 21″	114,69
60°	120°	18° 57′ 3″	41° 2′ 57″	121,32
70°	110°	20° 38′ 0″	49° 22′ 0″	129,21
80°	110°	21° 40′ 21″	58° 19′ 39″	138,27
90°	90°	22° 1′ 27″	67° 58′ 33″	148,32

Fällt der Strahl nun unter den eben genannten Einfallswinkel e_2 bei J auf die Linse auf, so wird er, da er in ein dichteres Medium tritt, abgelenkt, so dass nach Snellius ist $\frac{\sin e_2}{\sin e^1} = n$.

Dieser Brechungsexpamat nimmt für die verschiedenen Strahlen die früher erwähnten Werte an. Es berechnen sich darnach die Brechungswinkel e_λ für die einzelnen Strahlen folgendermassen:

Tabelle 2.

$\sphericalangle e_2$	A.	B.	C.	D.	E.	F.	G.	H.
10°	6° 8′ 12″	6° 7′ 27″	6° 7′ 0″	6° 5′ 46″	6° 4′ 14″	6° 2′ 51″	6° 0′ 12″	5° 57′ 54″
20°	12° 11′ 0″	12° 7′ 45″	12° 7′ 53″	12° 5′ 29″	12° 1′ 20″	11° 58′ 33″	11° 53′ 16″	11° 48′ 37″
30°	17° 55′ 40″	17° 53′ 22″	17° 52′ 2″	17° 48′ 23″	17° 43′ 41″	17° 39′ 32″	17° 31′ 36″	17° 24′ 36″
40°	23° 22′ 43″	23° 15′ 35″	23° 13′ 49″	23° 9′ 0″	23° 2′ 44″	22° 57′ 12″	22° 46′ 38″	22° 37′ 20″
50°	28° 8′ 18″	28° 4′ 28″	28° 2′ 18″	27° 56′ 18″	27° 48′ 30″	27° 41′ 40″	27° 28′ 34″	27° 17′ 2″
60°	32° 13′ 6″	32° 8′ 38″	32° 6′ 29″	31° 59′ 0″	31° 49′ 50″	31° 41′ 47″	31° 26′ 23″	31° 12′ 51″
70°	35° 20′ 43″	35° 15′ 40″	35° 12′ 47″	35° 4′ 53″	34° 54′ 33″	34° 45′ 30″	34° 28′ 42″	34° 13′ 0″
80°	37° 19′ 14″	37° 13′ 50″	37° 10′ 43″	37° 2′ 11″	36° 51′ 7″	36° 41′ 21″	36° 22′ 50″	36° 6′ 31″
90°	37° 59′ 25″	37° 54′ 18″	37° 51′ 7″	37° 42′ 20″	37° 41′ 7″	37° 21′ 4″	37° 2′ 4″	36° 45′ 51″

Wir können uns nun die Bilddistanzen x_1 und x_2 nach den vorhin abgeleiteten Formeln für die Zylinderlinsen berechnen.

Wir erhalten dann folgende Werte:

Tabelle 3 (für die x_1-Werte.)

$\sphericalangle e_2 =$	10⁰	20⁰	30⁰	40⁰	50⁰	60⁰	70⁰	80⁰	90⁰
A.	81,13	80,92	80,54	79,54	77,35	71,54	64,97	55,96	58,39
B.	79,97	79,82	79,64	78,58	76,64	67,09	63,99	55,53	47,94
C.	79,86	79,78	79,43	78,40	76,42	69,96	62,83	54,95	47,88
D.	79,53	79,45	79,42	78,27	76,09	69,85	62,80	54,60	47,80
E.	79,37	79,28	79,20	78,17	75,44	69,81	62,76	54,71	47,75
F.	79,33	79,19	79,11	78,15	75,07	69,77	62,69	54,67	47,69
G.	79,28	79,08	79,03	78,11	74,94	69,72	62,62	54,20	47,58
H.	79,16	79,91	78,95	78,02	74,72	69,61	62,44	54,02	47,44

Tabelle 4 (für die x_2 Werte.)

$\sphericalangle e_2 =$	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
A.	163,37	166,16	170,89	177,57	186,30	197,08	209,89	224,60	240,92
B.	163,71	166,51	171,24	177,94	186,68	197,48	210,32	225,16	241,42
C.	163,89	166,71	171,45	178,15	186,90	197,72	210,57	225,33	241,72
D.	164,44	167,25	172,01	178,74	187,95	198,37	211,26	226,07	242,51
E.	165,15	167,97	172,75	179,50	188,32	199,22	212,17	227,04	243,55
F.	165,78	168,61	173,40	180,19	189,04	199,98	212,98	227,91	244,57
G.	166,98	169,84	174,67	181,50	190,42	201,44	214,53	229,57	246,36
H.	168,85	170,95	175,80	182,68	191,65	202,75	215,93	231,06	247,86

Verfolgen wir den bei seinem Eintritt in die Linse abgelenkten Strahl weiter, so möge er beim Austritt aus derselben die zweite Grenzfläche der Linie in einem Punkte E treffen. Er wird nun wieder abgelenkt, aber im umgekehrten Verhältnis. Es entsteht also auch wieder ein Einfallswinkel, der aber der verschiedenen Gestalt der Linsen gemäss auch ein verschiedener sein muss. Wir können daher bei dem weiterem Rechnungsgang die Linsen nicht mehr gemeinsam betrachten. Zuerst wollen wir die konkavkonvexe Linse weiter untersuchen.

Die konkavkonvexe Zylinderlinse.

In Figur 1 auf Tafel I haben wir die Krümmungsmittelpunkte mit $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ bezeichnet. Ihr Abstand beträgt 75 mm. Der Radius der konkaven Fläche beträgt 90 mm. Wir hatten schon in der allgemeinen Betrachtung der Zylinderlinsen das Dreieck $\mathfrak{L}\,\mathfrak{J}\,\mathfrak{M}_1$ konstruiert. Verbinden wir nun noch $\mathfrak{M}_2$ mit $\mathfrak{E}$, so schliesst die Verlängerung von $\mathfrak{M}_2\,\mathfrak{E}$ mit der Sehne $\mathfrak{J}\,\mathfrak{E}$ den Einfallswinkel e_1' ein.

Führen wir nun folgende Bezeichnungen ein:

1) $\mathfrak{M}_1\,\mathfrak{J} = r_1$;
2) $\mathfrak{M}_2\,\mathfrak{E} = r_2$;
3) $\mathfrak{M}_1\,\mathfrak{M}_2 = a$;
4) $\mathfrak{J}\,\mathfrak{E} = z$;
5) $\mathfrak{L}\,\mathfrak{M}_1 = c$;
6) $\sphericalangle\,\mathfrak{J}\,\mathfrak{L}\,\mathfrak{M}_1 = \varphi$
7) $\sphericalangle\,\mathfrak{J}\,\mathfrak{M}_1\,\mathfrak{L} = \gamma$;
8) $\sphericalangle\,\mathfrak{L}\,\mathfrak{J}\,\mathfrak{M}_1 = \omega$
9) $\sphericalangle\,\mathfrak{J}\,\mathfrak{M}_1\,\mathfrak{M}_2 = \psi$;
10) $\sphericalangle\,\mathfrak{M}_1\,\mathfrak{M}_2\,\mathfrak{J} = \alpha$
11) $\sphericalangle\,\mathfrak{M}_1\,\mathfrak{J}\,\mathfrak{M}_2 = \beta$;
12) $\sphericalangle\,\mathfrak{E}\,\mathfrak{J}\,\mathfrak{M}_2 = \gamma$
13) $\sphericalangle\,\mathfrak{J}\,\mathfrak{M}_2\,\mathfrak{E} = \delta$;
14) $\sphericalangle\,\mathfrak{M}_2\,\mathfrak{E}\,\mathfrak{J} = \varsigma$
15) $\mathfrak{J}\,\mathfrak{M}_2 = \delta$;



so haben folgende Relationen statt:

1) $$\frac{r_1}{\mathfrak{C}} = \frac{\sin \varphi}{\sin e_2},$$

2) $$\chi = 180^\circ - [\varphi + (180 - e_2)],$$

3) $$\psi = 180^\circ - \chi,$$

4) $$\frac{x_0}{\mathfrak{C}} = \frac{\sin \chi}{\sin e_2},$$

5) $$d^2 = a^2 + r_1^2 - 2ar_1 \cos \psi,$$

6) $$\frac{\sin \alpha}{\sin \psi} = \frac{r_1}{d},$$

7) $$\beta = 180^\circ - (\alpha + \psi),$$

8) $$\gamma = e_1 - \beta,$$

9) $$\frac{\sin \zeta}{\sin \gamma} = \frac{d}{r_2},$$

10) $$\delta = 180^\circ - (\gamma + \xi),$$

11) $$\frac{Z}{r_2} = \frac{\sin \delta}{\sin \gamma},$$

12) $$e_1' = 180^\circ - \zeta,$$

Wir kennen jetzt den Einfallswinkel e_1' und können uns den entsprechenden Brechungswinkel e_2' berechnen, da

$$\frac{\sin e_1'}{\sin e_2'} = \frac{1}{n} \text{ ist.}$$

Ebenso haben wir mit Hülfe der Relationen die Länge der Sehne Z gefunden, so dass wir durch Subtraktion dieses Wertes von den vorher angegebenen x_1- und x_2-Werten die Bilddistanzen x_1' und x_2' erhalten, gemessen vom Austritt des Strahles aus der Linse.

Auf diese Weise sind die Tabellen 5 bis 12 am Ende der Arbeit für die Bilddistanzen x_1' und x_2' der Strahlen verschiedener Wellenlänge berechnet.

In den Tabellen bedeutet:

1) e_2 = der Einfallswinkel auf die erste Grenzfläche der Linse,
2) e_1 = der Brechungswinkel der ersten Grenzfläche,
3) e_1' = der Einfallswinkel auf die zweite Grenzfläche,
4) e_2' = der Brechungswinkel der zweiten Grenzfläche,
5) Z = die Länge der Sehne innerhalb der Linse,
6) x_1' = die Bilddistanz des Lichtpunktes im Hauptnormalschnitt, gemessen vom Austritt des Strahles aus der Linse,
7) x_2' = die Bilddistanz des Lichtpunktes im Nebennormalschnitt, gemessen vom Austritt des Strahles aus der Linse.

Die plankonvexe Zylinderlinse.

Der Querschnitt der plankonvexen Zylinderlinse soll ein Halbkreis sein. Der Krümmungsradius ist wieder = 60 mm. Wir führen auch hier analoge Bezeichnungen ein wie bei der konvexkonkaven Linse, nämlich

1) $MJ = r$; 2) $LM = c$
3) $JE = z$; 4) $\sphericalangle JME = \varphi$;
5) $\sphericalangle JEM = \zeta$.

Wir erhalten dann folgende Ralationen:

1) $$\frac{\sin \varphi}{\sin e_2} = \frac{r}{c},$$

2) $$\chi = 180^0 - [\varphi + (180 - e_2)],$$

3) $$\psi = 90^0 - \chi,$$

4) $$\frac{x_0}{r} = \frac{\sin \chi}{\sin \varphi},$$

5) $$\zeta = 180^0 - (e_1 + \psi)$$

6) $$\frac{Z_1}{r} = \frac{\sin \psi}{\sin \zeta},$$

7) $$e_1' = \zeta - 90^0.$$

Wir können uns dann wieder aus der Formel

$\frac{\sin e_1'}{\sin e_2'} = \frac{1}{n}$, den Brechungswinkel e_2' berechnen und haben dann analog dem früheren die Tabellen 13 bis 20 aufgestellt.

Die bikonvexe Zylinderlinse

Der Querschnitt unserer bikonvexen Zylinderlinse soll ein Kreis sein mit dem Radius $r = 60$ mm. Aus der Figur 3 auf Tafel I folgt, dass das Dreieck $J\,M\,E$ gleichschenklig ist, also $\sphericalangle E\,J\,M = \sphericalangle M\,E\,J$. Wir haben hier einfach $e_1' = e_2$ und $e_2' = e_2$. Ferner haben wir noch folgende Relationen:

1) $$\frac{\sin \varphi}{\sin e_2} = \frac{r}{c}$$

2) $$\chi = 180^0 - [\varphi + (180^0 - e_2)]$$

3) $$\psi = 180^0 - 2\,e_1$$

4) $$\frac{Z_1}{r} = \frac{\sin 2e_1}{\sin e_1}$$

5) $$\frac{x_0}{r} = \frac{\sin \chi}{\sin \varphi}$$

Es ergaben sich hiernach die Tabellen 21 bis 28 für die Bilddistanzen bei der bikonvexen Zylinderlinse.

Tabellen für die konvexkonkave Zylinderlinse.

Tabelle 5 für Strahlen entspr. der Fr.-Linie A.

$\sphericalangle e_2$	$\sphericalangle e_1'$	$\sphericalangle e_2'$	Z	x_1'	x_2'
10°	5° 28′ 45″	8° 55′ 21″	44,94	36,19	118,43
20°	7° 42′ 52″	12° 35′ 40″	44,44	36,48	121,72
30°	10° 46′ 1″	17° 39′ 55″	43,66	36,88	127,23
40°	13° 2′ 28″	21° 29′ 41″	42,31	37,23	135,26
50°	13° 50′ 50″	22° 52′ 40″	40,22	37,13	146,08
60°	12° 45′ 20″	21° 1′ 1″	37,31	34,23	159,77
70°	11° 57′ 57″	19° 40′ 53″	33,35	31,62	176,54
80°	6° 3′ 23″	9° 52′ 6″	28,23	27,73	196,37
90°	0° 22′ 40″	6° 8′ 49″	20,33	28,06	220,59

Tabelle 6 für Strahlen entspr. der Fr.-Linie B.

$\sphericalangle e_2$	$\sphericalangle e_1'$	$\sphericalangle e_2'$	Z	x_1'	x_2'
10°	3° 57′ 35″	6° 17′ 13″	44,87	35,10	118,84
20°	7° 37′ 24″	12° 28′ 31″	44,27	35,55	122,24
30°	10° 42′ 35″	17° 36′ 24″	43,65	35,99	127,59
40°	12° 51′ 55″	21° 14′ 59″	42,29	36,29	135,65
50°	13° 45′ 15″	22° 46′ 4″	40,21	36,43	146,47
60°	13° 3′ 7″	21° 34′ 1′	37,26	29,83	160,22
70°	10° 42′ 8″	17° 35′ 42″	33,25	30,74	177,07
80°	5° 56′ 17″	9° 41′ 40″	28,22	27,31	196,94
90°	0° 15′ 52″	0° 25′ 50″	20,32	27,62	221,10

Tabelle 7 für Strahlen entspr. der Fr.-Linie C.

$\sphericalangle e_2$	$\sphericalangle e_1'$	$\sphericalangle e_2'$	Z	x_1'	x_2'
10°	3° 56′ 50″	6° 26′ 25″	44,83	35,03	119,06
20°	7° 35′ 40″	12° 26′ 15″	44,13	35,65	122,58
30°	10° 40′ 35	17° 34′ 21″	43,64	35,79	127,51
40°	12° 50′ 46″	21° 14′ 33	42,28	36,12	135,87
50°	13° 43′ 32	22° 44′ 52″	40,20	36,22	146,70
60°	10° 52′ 33″	17° 53′ 40	37,20	32,76	160,52
70°	10° 24′ 25	17° 7′ 13″	33,20	29,61	177,35
80°	5° 52′ 11	9° 35′ 37″	28,21	26,74	197,12
90°	0° 12′ 28	0° 10′ 13″	20,30	27,58	221,41

Tabelle 8 für Strahlen entspr der Fr.-Linie D.

∢ e_1	∢ e_2'	∢ e_2'	Z	x_1'	x_2'
10°	3° 55′ 4″	6° 24′ 51	44,83	34,70	119,61
20°	7° 34′ 31″	12° 26′ 50″	44,12	35,33	123,13
30°	10° 35′ 7″	17° 28′ 43″	43,63	35,79	128,38
40°	12° 42′ 7″	21° 4′ 11″	42,27	36,00	136,47
50°	13° 33′ 20″	22° 32′ 0″	39,59	37,50	149,36
60°	12° 49′ 20″	21° 16′ 31″	37,20	32,65	161,17
70°	10° 27′ 59″	17° 15 59″	33,21	29,59	178,05
80°	5° 40′ 57″	7° 16′ 11″	28,20	26,40	197,87
90°	0° 0′ 8″	0° 0′ 0″	20,29	27,51	222,22

Tabelle 9 für Strahlen entspr. der Fr.-Linie E.

∢ e_2	∢ e_1'	∢ e_2'	Z	x_1'	x_2'
10°	3° 52 15″	6° 21′ 58″	44,80	34,57	120,35
20°	7° 17 59″	12° 2′ 28″	44,10	35,18	123,87
30°	10° 27′ 41″	17° 21′ 1″	43,57	35,83	129,18
40°	12° 33′ 15″	21° 4′ 58″	42,16	35,91	137,34
50°	13° 23 13″	22° 20 44″	39,45	35,99	148,87
60°	12° 46 34″	21° 17′ 28″	37,19	32,62	162,03
70°	9° 59 20″	16° 32′ 52″	33,16	29,60	179,01
80°	5° 26 28″	8° 57′ 26″	27,97	26,74	199,07
90°	0° 0′ 0″	0° 0′ 0″	20,28	27,47	223,27

Tabelle 10 für Strahlen entspr. der Fr.-Linie F.

∢ e_2	∢ e_1'	∢ e_2'	Z	x_1'	x_2'
10°	3° 50′ 8″	6° 19′ 50″	44,79	34,54	120,99
20°	7° 14′ 12″	11° 59′ 0″	44,09	35,10	124,52
30°	9° 19′ 7″	15° 28′ 15″	43,50	35,81	129,90
40°	12° 24′ 32″	20° 44′ 46″	42,15	36,00	138,04
50°	13° 13′ 00″	22° 8′ 18″	39,40	35,67	149,64
60°	12° 17′ 23″	20° 32′ 17″	37,18	32,59	162,80
70°	9° 48′ 18″	16° 18′ 4″	33,15	29,54	179,83
80°	5° 13′ 24″	8° 38′ 5″	27,97	26,70	199,94
90°	0° 7′ 29″	0° 12′ 18″	20,26	27,43	224,31

Tabelle 11 für Strahlen entspr. der Fr.-Linie G.

∢ e_2	∢ e_1'	∢ e_2'	Z	x_1'	x_2'
10°	3° 46′ 42″	6° 15′ 57″	44,75	34,53	120,99
20°	7° 6′ 17″	11° 57′ 44″	44,01	35,07	124,52
30°	8° 40′ 31″	16° 51′ 35″	43,45	35,68	129,90
40°	12° 9′ 3″	20° 15′ 50″	42,12	35,99	138,04
50°	12° 51′ 49″	21° 27′ 39″	39,39	35,55	149,64
60°	11° 55′ 11″	20° 23′ 40″	37,04	32,68	162,80
70°	9° 23′ 8″	15° 24′ 32″	33,14	29,48	179,83
80°	4° 49′ 13″	8° 1′ 18″	27,95	26,70	199,94
90°	0° 0′ 0″	0° 0′ 0″	20,26	27,43	224,31

Tabelle 12 für Strahlen entspr. der Fr.-Linie H.

∢ e_2	∢ e_1'	∢ e_2'	Z	x_1'	x_2'
10°	3° 43′ 16″	6° 13′ 31″	44,74	34,42	124,11
20°	7° 4′ 30″	11° 56′ 45″	43,95	35,06	127,00
30°	8° 39′ 38″	15° 34′ 16″	43,42	35,53	131,38
40°	11° 25′ 16″	19° 27′ 25″	42,10	35,92	140,58
50°	11° 34′ 57″	20° 52′ 10″	39,30	35,42	152,35
60°	10° 27′ 58	19° 35′ 6″	37,01	32,60	165,74
70°	9° 2′ 16″	15° 13′ 5″	33,06	29,38	182,87
80°	4° 29′ 10″	7° 31′ 24″	27,89	26,13	203,17
90°	0° 0′ 0″	0° 0′ 0″	20,62	27,18	227,60

Tabellen für die plankonvexe Zylinderlinse.

Tabelle 13 für Strahlen entspr. der Fr.-Linie A.

∢ e_2	∢ e_1'	∢ e_2'	Z	x_1'	x_2'
10°	0° 7′ 48″	0° 12′ 39″	59,64	21,49	103,73
20°	0° 27′ 0″	0° 40′ 0″	58,55	22,37	107,61
30°	1° 16′ 20″	2° 4′ 2″	56,68	23,86	114,21
40°	2° 40′ 17″	4° 20′ 31″	53,96	25,58	123,61
50°	5° 9′ 42″	8° 24′ 30″	50,35	27,00	135,95
60°	8° 10′ 54″	13° 21′ 56″	45,79	25,80	151,29
70°	14° 1′ 17″	23° 10′ 32″	40,27	24,70	169,62
80°	22° 0′ 46″	37° 13′ 80″	30,06	25,90	194,54
90°	30° 8′ 0″	54° 37′ 54″	25,84	22,55	215,08

Tabelle 14 für Strahlen entspr. der Fr.-Linie B.

∢ e_2	∢ e_1'	∢ e_2'	Z	x_1'	x_2'
10°	0° 9′ 12″	0° 13′ 26″	59,64	20,33	104,70
20°	0° 31′ 35″	0° 50′ 5″	58,55	21,27	111,96
30°	1° 19′ 19″	2° 8′ 23″	56,68	22,96	114,56
40°	2° 48′ 41″	4° 34′ 51″	53,96	24,62	123,98
50°	5° 14′ 32″	8° 32′ 14″	50,36	26,28	136,32
60°	8° 54′ 0″	14° 35′ 29″	45,80	24,29	151,68
70°	14° 6′ 27″	23° 21′ 50″	40,28	23,71	170,04
80°	21° 6′ 44″	35° 52′ 4″	30,08	25,47	195,08
90°	30° 5′ 18″	54° 41′ 14″	25,99	21,95	215,43

Tabelle 15 für Strahlen entspr. der Fr.-Linie C.

∢ e_2	∢ e_1'	∢ l_2'	Z	x_1'	x_2'
10°	0° 9′ 0″	0° 14′ 40″	59,64	20,22	104,25
20°	0° 30′ 59″	0° 50′ 30″	58,55	21,23	108,16
30°	1° 19′ 35″	2° 9′ 43″	56,68	22,75	114,77
40°	2° 49′ 17″	4° 36′ 7″	53,97	29,93	124,18
50°	5° 16′ 3″	8° 36′ 15″	50,36	26,06	136,54
60°	8° 56′ 28″	14° 40′ 18″	45,80	29,16	151,92
70°	14° 9′ 13″	23° 29′ 00″	20,29	22,54	170,28
80°	21° 8′ 56″	36° 0′ 50″	30,11	24,84	195,22
90°	30° 7′ 26″	54° 52′ 26″	26,01	21,87	215,70

Tabelle 16 für Strahlen entspr. der Fr.-Linie D.

∢ e_2	∢ e_1	∢ e_2'	Z	x_1'	x_2'
10°	0° 10 14″	0° 16′ 20″	59,64	19,89	104,80
20°	0° 32 51	0° 52′ 51″	58,55	20,90	108,70
30°	1° 23′ 14″	2° 16′ 6″	56,68	22,74	115,33
40°	2° 55′ 6″	4° 46′ 30″	53,97	24,30	124,77
50°	5° 22′ 3″	8° 47′ 50″	50,36	25,73	137,59
60°	9° 3′ 57″	14° 55′ 45″	45,82	24,03	152,55
70°	14° 17′ 7″	23° 47′ 35″	40,32	22,48	170,94
80°	21° 17′ 28″	36° 25′ 10″	30,13	21,47	195,94
90°	30° 16′ 13″	55° 30′ 21″	26,04	21,76	216,47

Tabelle 17 für Strahlen entspr. der Fr.-Linie E.

∢ e_2	∢ e_1'	∢ e_2'	Z	x_1'	x_2'
10°	0° 11′ 45″	0° 19 17″	59,64	19,73	105,51
20°	0° 36′ 32″	0° 58′ 39″	58,55	20,73	109,42
30°	1° 27′ 56″	2° 24′ 39″	56,68	22,72	116,07
40°	3° 0′ 22″	4° 55′ 7″	53,98	24,09	125,52
50°	5° 29 51″	9° 20′ 46″	50,37	25,07	137,95
60°	9° 13′ 7″	15° 11′ 5″	45,84	23,97	153,38
70°	14° 27′ 28″	24° 5′ 30″	40,35	22,41	171,82
80°	21° 28 32″	36° 46′ 3″	30,18	24,53	196,86
90°	30° 17′ 26″	55° 33′ 22″	26,05	21,70	217,50

Tabelle 18 für Strahlen entspr. der Fr.-Linie F.

$\sphericalangle e_2$	$\sphericalangle e_1'$	$\sphericalangle e_2'$	Z	x_1'	x_2'
10°	0° 13′ 9″	0° 21′ 7″	59,64	19,69	106,14
20°	0° 39′ 19″	1° 4′ 28″	58,55	20,64	110,06
30°	1° 32′ 5″	2° 31′ 8″	56,68	22,63	116,72
40°	3° 5′ 54″	5° 6′ 37″	53,98	24,17	126,21
50°	5° 46′ 41″	9° 33′ 13″	50,38	25,31	138,66
60°	9° 21′ 10″	15° 32′ 18″	45,86	23,91	154,12
70°	14° 36′ 30″	24° 33′ 46″	40,38	22,31	172,60
80°	21° 38′ 18″	37° 25′ 46″	30,21	24,46	197,70
90°	30° 37′ 20″	56° 38′ 53″	26,14	21,55	218,43

Tabelle 19 für Strahlen entspr. der Fr.-Linie G.

$\sphericalangle e_2$	$\sphericalangle e_1'$	$\sphericalangle e_2'$	Z	x_1'	x_2'
10°	0° 15′ 48″	0° 26′ 14″	59,64	19,64	107,34
20°	0° 44′ 36″	1° 14′ 3″	58,55	20,53	111,29
30°	1° 40′ 1″	2° 46′ 6″	56,69	22,44	117,98
40°	3° 16′ 28″	5° 22′ 1″	53,99	24,12	128,51
50°	5° 49′ 47″	9° 42′ 32″	50,40	24,54	140,02
60°	9° 37′ 34″	16° 7′ 50″	45,89	23,83	155,55
70°	14° 59′ 10″	25° 25′ 30″	40,44	22,18	174,09
80°	21° 59′ 49″	38° 27′ 30″	30,27	23,93	199,30
90°	30° 56′ 29″	58° 36′ 46″	26,33	21,35	220,13

Tabelle 20 für Strahlen entspr. der Fr.-Linie H.

∢ e_2	∢ e_1'	∢ e_2'	Z	x_1'	x_2'
10°	0° 18′ 6″	0° 30′ 2″	59,64	19,52	109,21
20°	0° 49′ 15″	1° 22′ 19″	58,55	20,46	112,40
30°	1° 47′ 1″	2° 58′ 54″	56,70	22,25	119,10
40°	4° 25′ 46″	6° 1′ 17″	54,07	23,95	128,61
50°	6° 1′ 19″	10° 5′ 47″	50,42	24,30	141,23
60°	9° 50′ 6″	16° 35′ 5″	45,92	24,31	156,83
70°	15° 9′ 0″	25° 33′ 49″	40,48	21,96	175,45
80°	22° 13′ 8″	39° 11′ 6″	30,33	23,69	200,73
90°	31° 13′ 12″	60° 2′ 5″	26,30	21,14	221,56

Tabellen für die bikonvexe Zylinderlinse.

Tabelle 21 für Strahlen entspr. der Fr.-Linie A.

$\sphericalangle e_2 = \sphericalangle e_2'$	$\sphericalangle e_1 = \sphericalangle e_1'$	Z	x_1'	x_2'
10°	6° 8′ 12″	119,31	38,18	44,06
20°	12° 11′ 0″	117,31	36,19	48,85
30°	17° 55′ 40″	113,71	33,17	57,18
40°	23° 22′ 45″	111,85	32,31	66,72
50°	28° 8′ 18″	105,81	27,46	80,49
60°	32° 13′ 6″	101,52	29,98	95,56
70°	35° 20′ 43″	97,88	32,91	112,01
80°	37° 19′ 14″	95,43	39,47	129,17
90°	37° 59′ 52″	94,56	46,17	146,36

Tabelle 22 für Strahlen entspr. der Fr.-Linie B.

$\sphericalangle e_2 = \sphericalangle e_2'$	$\sphericalangle e_1 = \sphericalangle e_1'$	Z	x_1'	x_2'
10°	6° 7' 27"	119,31	39,34	44,40
20°	12° 7' 45"	117,31	37,49	49,20
30°	17° 53' 22	114,19	34,45	57,05
40°	23° 15' 35"	110,24	31,66	67,70
50°	28° 4' 28"	105,87	29,23	80,81
60°	32° 8' 38"	101,60	34,51	95,88
70°	35° 15' 40"	97,98	33,99	116,34
80°	37° 15' 50"	95,54	40,01	129,62
90°	37° 54' 18"	94,69	46,75	146,73

Tabelle 23 für Strahlen entspr. der Fr.-Linie C.

$\sphericalangle e_2 = \sphericalangle e_2'$	$\sphericalangle e_1 = \sphericalangle e_1'$	Z	x_1'	x_2'
10°	6° 7' 0"	119,31	39,45	44,58
20°	12° 6' 53"	117,32	37,54	49,17
30°	17° 52' 2"	114,21	34,78	57,24
40°	23° 13' 49"	110,27	31,87	67,88
50°	28° 2' 18"	105,91	29,49	80,99
60°	32° 6' 29"	101,66	31,70	96,06
70°	35° 12' 47"	98,04	35,21	112,53
80°	37° 10' 43"	95,61	40,66	129,72
90°	37° 51' 7"	94,76	46,88	146,95

Tabelle 24 für Strahlen entspr. der Fr.-Linie D.

$\sphericalangle e_2 = \sphericalangle e_2'$	$\sphericalangle e_1 = \sphericalangle e_1'$	Z	x_1'	x_2'
10°	6° 5′ 46″	119,31	39,78	45,13
20°	12° 5′ 29″	117,34	37,59	49,91
30°	17° 48′ 23″	114,24	34,82	57,77
40°	23° 9′ 0″	110,33	32,06	68,41
50°	27° 56′ 18″	106,00	29,91	81,95
60°	31° 59′ 0″	101,78	31,93	96,59
70°	35° 4′ 53″	98,20	35,40	113,06
80°	36° 51′ 7″	95,79	41,19	130,28
90°	37° 42′ 20″	94,92	47,12	147,59

Tabelle 25 für Strahlen entspr. der Fr.-Linie E.

$\sphericalangle e_2 = \sphericalangle e_2'$	$\sphericalangle e_1 = \sphericalangle e_1'$	Z	x_1'	x_2'
10°	6° 4′ 14″	119,32	39,95	45,88
20°	12° 1′ 20″	117,36	38,08	50,61
30°	17° 43′ 41″	114,30	34,90	58,45
40°	23° 2′ 44″	110,42	32,25	69,68
50°	27° 48′ 30″	106,14	30,70	82,18
60°	31° 49′ 50″	101,95	32,14	97,27
70°	34° 54′ 33″	98,41	35,65	113,76
80°	36° 51′ 7″	96,02	41,31	131,02
90°	37° 41′ 7″	95,33	47,58	148,22

Tabelle 26 für Strahlen entspr. der Fr.-Linie F.

$\sphericalangle e_2 = \sphericalangle e_2'$	$\sphericalangle e_1 = \sphericalangle e_1'$	Z	x_1'	x_2'
10°	6° 2′ 51″	119,33	40,00	46,45
20°	11° 58′ 33″	117,31	38,20	51,22
30°	17° 39′ 32″	114,33	35,02	59,07
40°	22° 57′ 12″	110,50	32,35	69,69
50°	27° 41′ 40″	106,25	31,18	82,79
60°	31° 41′ 47″	102,10	32,33	97,88
70°	34° 45′ 30″	98,59	35,90	114,39
80°	36° 41′ 21″	96,23	41,56	131,68
90°	37° 21′ 4″	95,39	47,70	149,18

Tabelle 27 für Strahlen entspr. der Fr.-Linie G.

$\sphericalangle e_2 = \sphericalangle e_2'$	$\sphericalangle e_1 = \sphericalangle e_1'$	Z	x_1'	x_2'
10°	6° 0′ 12″	119,41	40,13	47,57
20°	11° 53′ 16″	117,42	38,34	52,42
30°	17° 31′ 36″	114,42	35,29	60,25
40°	22° 46′ 38″	110,52	32,41	70,98
50°	27° 28′ 34″	106,46	31,52	83,76
60°	31° 26′ 23″	102,48	32,76	99,96
70°	34° 28′ 42	98,93	36,31	115,60
80°	36° 22′ 50″	96,61	42,41	132,96
90°	37° 2′ 4″	95,79	48,21	150,57

Tabelle 28 für Strahlen entspr. der Fr.-Linie H.

$\sphericalangle e_2 = \sphericalangle e_2'$	$\sphericalangle e_1 = \sphericalangle e_1'$	Z	x_1'	x_2'
10°	5° 57′ 54	119,51	40,35	49,34
20°	11° 48′ 37″	117,46	38,45	52,49
30°	17° 24′ 36″	114,50	35,55	61,30
40°	22° 37′ 20″	110,73	32,71	71,95
50°	27° 17′ 2″	106,65	31,93	85,00
60°	31° 12′ 51″	102,63	33,02	100,12
70°	34° 13′ 0″	99,23	36,79	116,70
80°	36° 6′ 31″	96,95	42,93	134,11
90°	36° 45′ 21″	96,14	48,70	151,72

Schlussbetrachtung.

Durch Aufstellen dieser Tabellen sind wir in der Lage, die Bildkurven zu konstruieren, indem wir die Abscissen der Bildpunkte auf den entsprechenden Strahlen abtragen und die so erhaltenen Punkte durch eine Kurve verbinden. Wir erhalten dann die Tafeln II, III und IV.

Auf diesen ist der leuchtende Punkt mit L bezeichnet. Von ihm aus fallen auf die schwarz ausgezogene Cylinderlinse nach beiden Seiten die rot ausgezogenen Lichtstrahlen, die beim Eintritt und Austritt gebrochen werden. Die entstehende x_1-Kurve ist rot, die x_2-Kurve blau ausgeführt.

Betrachten wir nun diese beiden Kurven bei den drei verschiedenen Zylinderlinsen, so können wir folgenden Zusammenhang herstellen: Die Enden der x_1-Kurve schliessen sich immer mehr, je konvergenter die Strahlen werden. Die äusserste Konvergenz ist bei der Linse erreicht, deren Querschnitt ein Kreis ist. Da haben sich die Enden schon überschnitten.

Die x_2-Kurve bildet eine charakteristische Schleife. Diese wird um so kleiner, je konvergenter die Lichtstrahlen werden.

Die Tabellen zeigen ferner, dass wir infolge der verschiedenen Brechbarkeit der Strahlen auch verschiedenen Bilddistanzen bekommen, wenn die Entfernung des leuchtenden Punktes von dem Scheitel der Linse dieselbe bleibt.

Diese chromatische Abweichung würde der Schärfe der durch die Linsen erzeugten Bilder bedeutenden Eintrag tun, indem dieselben von farbigen Säumen umgeben erscheinen.

Die Anregung zu vorliegender Arbeit verdanke ich Herrn Prof. Dr. L. Matthiessen. Hierfür, sowie für das Interesse und die wertvollen Unterstützungen, welche Herr Prof. Dr. Wachsmuth mir bei der Ausführung meiner Arbeit zu Teil werden liess, drängt es mich, auch an dieser Stelle beiden Herren meinen aufrichtigen Dank auszusprechen.

